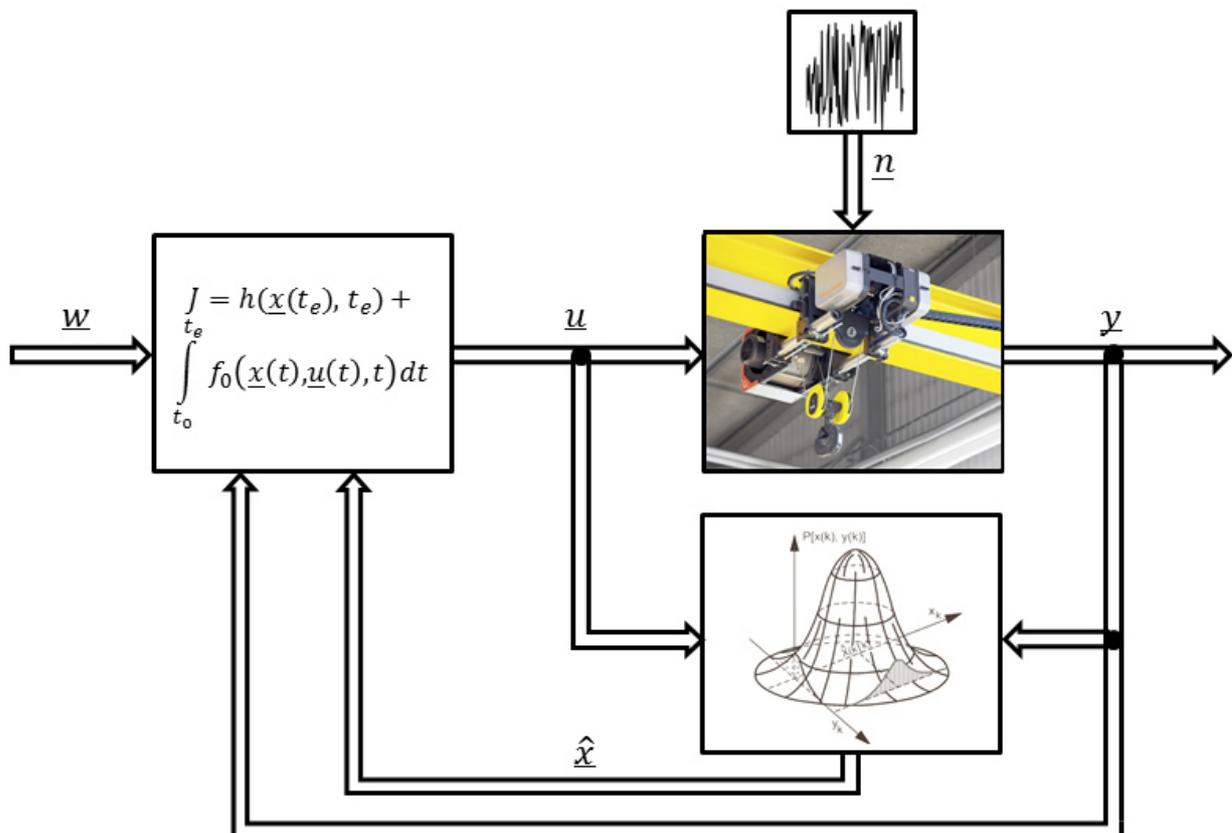


Beiblätter zur Vorlesung

Optimale Regelung und Schätzung

Dr.-Ing. Mathias Kluwe



Sommersemester 2016

<http://www.irs.kit.edu>

- 1) Föllinger, O. Optimierung dynamischer Systeme. R. Oldenbourg Verlag, München Wien, 2. Auflage, 1988.
- 2) Anderson, B.D.O.
Moore, J.B. Optimal Control: Linear Quadratic Methods. Dover Publications, Inc., Mineola, New York, 1990.
- 3) Papageorgiou, M.
Leibold, M.
Buss, M. Optimierung. Statische, dynamische, stochastische Verfahren für die Anwendung. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 3. Auflage, 2012.
- 4) McFarlane, D.C.
Glover, K. Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Descriptions. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1990.
- 5) Föllinger, O. Regelungstechnik. Einführung in die Methoden und ihre Anwendung. VDE Verlag GmbH, Berlin Offenbach, 11., völlig neu bearbeitete Auflage, 2013.
- 6) Simon, D. Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2006.
- 7) Papoulis, A. Probability, Random Variables and Stochastic Processes. McGraw-Hill Publ. Comp., New York, 3. Auflage, 1991.
- 8) Krebs, V. Nichtlineare Filterung. Nachdruck des 1980 im R. Oldenbourg Verlag (München) erschienenen Buches, Erhältlich im IRS-Sekretariat.
- 9) Bryson, A.E.
Ho, Y.-C. Applied Optimal Control. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1975.

Gegeben sei das System

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t), \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$$

und das Bolzasche Gütemaß

$$J = h(\underline{x}(t_e), t_e) + \int_{t_0}^{t_e} f_0(\underline{x}, \underline{u}, t) dt.$$

Dann erhält man die optimalen Werte $\underline{u}^*(t, \underline{x}_0)$ und $\underline{x}^*(t, \underline{x}_0)$ durch folgendes Vorgehen (**Hamilton-Verfahren**):

- 1) Aufstellen der **Hamilton-Funktion**

$$H = H(\underline{x}, \underline{\psi}, \underline{u}, t) = -f_0 + \underline{\psi}^T \cdot \underline{f}$$

zur Auswertung der *notwendigen Bedingungen* für das Optimum.

- 2) Ermittlung von $\underline{u}^*(t, \underline{x}_0)$ aus der sogenannten **Steuerungsgleichung**

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{u}} = \underline{0}$$

- 3) Einsetzen der optimalen Steuergrößen $\underline{u}^*(t, \underline{x}_0)$ in die sogenannten **kanonischen Differentialgleichungen**

$$\dot{\underline{x}} = \frac{\partial H}{\partial \underline{\psi}}$$

$$\dot{\underline{\psi}} = -\frac{\partial H}{\partial \underline{x}}$$

Hierbei gelten folgende **Anfangs- und Endbedingungen**:

- Anfangsbedingung: $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$
- Fallunterscheidung für Endbedingung $\underline{x}(t_e)$:
 - Endpunkt $\underline{x}(t_e)$ fest:

$$\underline{x}(t_e) = \underline{x}_e$$

- Endpunkt $\underline{x}(t_e)$ auf Zielmannigfaltigkeit $\underline{z}(\underline{x}(t_e), t_e) = \underline{0}$:

$$\left. \frac{\partial h}{\partial \underline{x}} \right|_{t_e} + \underline{\psi}(t_e) - \left(\frac{\partial \underline{z}}{\partial \underline{x}} \right)^T \Big|_{t_e} \underline{\mu} = \underline{0}$$

(Transversalitätsbedingung)

- Endpunkt $\underline{x}(t_e)$ beliebig:

$$\left. \frac{\partial h}{\partial \underline{x}} \right|_{t_e} + \underline{\psi}(t_e) = \underline{0}$$

Falls t_e frei ist, tritt noch eine zusätzliche Bedingung

$$H(\underline{x}(t_e), \underline{\psi}(t_e), \underline{u}(t_e), t_e) - \left. \frac{\partial h}{\partial t} \right|_{t_e} = 0$$

Die Lösung der kanonischen Differentialgleichungen unter den Anfangs- und Endbedingungen führt zu den gesuchten Lösungen $\underline{x}^*(t, \underline{x}_0)$ und $\underline{\psi}^*(t, \underline{x}_0)$, die dann gemäß Schritt 2) die optimale Steuergröße $\underline{u}^*(t, \underline{x}_0)$ liefern.

Zur Berechnung der *optimalen Regelung* ist dann noch aus $\underline{x}^*(t, \underline{x}_0)$ und $\underline{\psi}^*(t, \underline{x}_0)$ die Abhängigkeit von \underline{x}_0 zu eliminieren, um $\underline{u} = \underline{R}(\underline{x}, t)$ zu erhalten.

Gegeben sei das System erster Ordnung (PT₁-Glied)

$$\dot{x} = -x + u,$$

d.h. in den allgemeinen Gleichungen gilt $\underline{A} = a = -1$ und $\underline{B} = b = 1$.

Betrachtet werde das Gütemaß

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_e} [qx^2(t) + ru^2(t)] dt$$

mit $q, r > 0$, das Meyersche Gütemaß verschwindet: $S = s = 0$.

In diesem Fall ergibt sich die skalare Riccati-Differentialgleichung zu

$$\dot{p}(t) = 2p(t) + p^2(t) \frac{1}{r} - q.$$

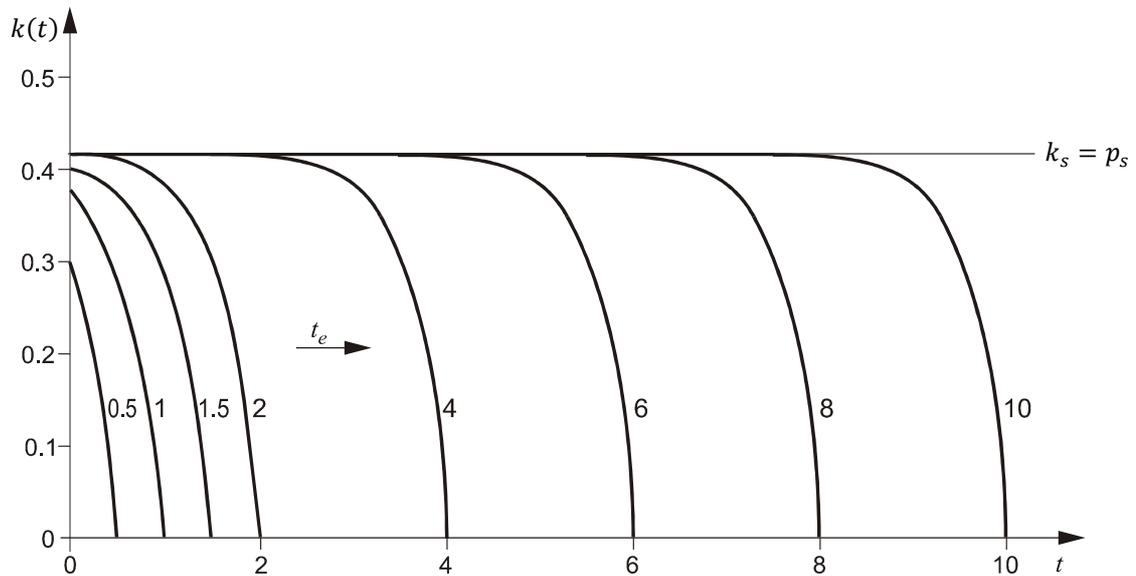
Das Endwertproblem zu dieser Differentialgleichung ($p(t_e) = s = 0$) kann durch Zeitsubstitution mit $\tau = t_e - t$ in ein Anfangswertproblem

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = -2p(\tau) - p^2(\tau) \frac{1}{r} + q, \quad p(0) = 0$$

überführt werden.

Die numerische Lösung $p(t)$ des Endwertproblems kann offline berechnet und abgespeichert werden und ist wegen $k(t) = r^{-1}bp(t)$ für $r = 1$ identisch mit dem optimalen Regler $k(t)$.

Die folgende Abbildung stellt Verläufe von $k(t)$ für verschiedene t_e mit $q = r = 1$ dar.



Man erkennt, dass sich für wachsende Endzeitpunkte t_e ein immer längerer Zeitraum ergibt, in dem $k(t)$ konstant bleibt. Der zugehörige Ordinatenwert ergibt sich aus der stationären Betrachtung der Differentialgleichung des Anfangswertproblems:

$$\dot{p}_s(\tau) = 0 = -2p_s - p_s^2 \frac{1}{r} + q.$$

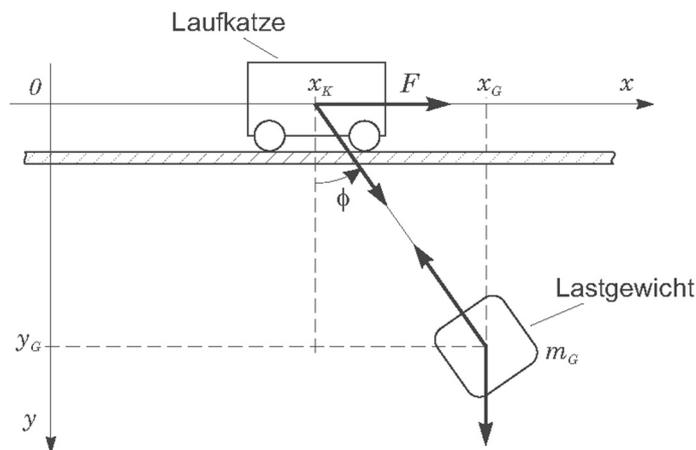
Mit $q = r = 1$ ergibt sich dann

$$p_s^2 + 2p_s - 1 = 0$$

mit den Lösungen $p_{s,1} = -1 + \sqrt{2}$ und $p_{s,2} = -1 - \sqrt{2}$. Wegen $p > 0$ ist daher der gesuchte Ordinatenwert

$$p_s = -1 + \sqrt{2} = 0,414.$$

Modellierung der Verladebrücke



Die hierbei auftretenden Größen sind

- x_K : Position der Laufkatze
- Φ : Winkelauslenkung des Lastgewichts
- m_K : Masse der Laufkatze
- m_G : Masse des Lastgewichts
- F : Antriebskraft der Laufkatze
- L : Seillänge
- g : Gravitationskonstante

Mit der Wahl der der Eingangsgröße $u = F$, der Ausgangsgröße $y = x_K$ sowie den Zustandsgrößen

$$x_1 = x_K; \quad x_2 = \dot{x}_K = v_K; \quad x_3 = \Phi; \quad x_4 = \dot{\Phi} = \omega$$

ergibt sich die folgende nichtlineare Zustandsdifferentialgleichung:

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_K \\ \frac{m_G g \sin \Phi \cos \Phi + L m_G \dot{\Phi}^2 \sin \Phi}{m_G \sin^2 \Phi + m_K} \\ \dot{\Phi} \\ -\frac{L m_G \dot{\Phi}^2 \sin \Phi \cos \Phi + (m_G + m_K) g \sin \Phi}{L(m_G \sin^2 \Phi + m_K)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{\cos \Phi}{L(m_G \sin^2 \Phi + m_K)} \end{bmatrix} \cdot F.$$

Durch Linearisierung des nichtlinearen Systemmodells um den Punkt $\Phi = \dot{\Phi} = 0$ (x_K, \dot{x}_K, F beliebig), erhält man das lineare Zustandsraummodell

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \underline{x}.$$

Die auftretenden Größen in der Matrix \underline{A} und dem Vektor \underline{b} sind:

$$a_{23} = \frac{m_G g}{m_K}, \quad b_2 = \frac{1}{m_K},$$

$$a_{43} = -\frac{(m_G + m_K)g}{L m_K}, \quad b_4 = -\frac{1}{L m_K}.$$

Das lineare Systemmodell stellt die Grundlage für den Entwurf des Riccati-Reglers dar. Im Folgenden seien die Parameterwerte

$$\begin{aligned} m_K &= 500 \text{ kg} \\ m_G &= 1000 \text{ kg} \\ L &= 10 \text{ m} \\ g &= 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

betrachtet.

Entwurf des Riccati-Reglers

Ziel der Verladebrücke ist ein möglichst schneller Transport des Lastgewichts bei gleichzeitiger Vermeidung möglicher Schwingungen des Transportguts. Deshalb wird die Gewichtungsmatrix der Zustandsvariablen für den Riccati-Entwurf so gewählt, dass Auslenkungen der ersten und dritten Zustandsgröße im Gütemaß besonders stark bestraft werden:

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 10^6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Des Weiteren wird $\underline{R} = r = 1$ gesetzt. Die resultierende Matrix-Riccati-Gleichung

$$\underline{P}_0 \underline{A} + \underline{A}^T \underline{P}_0 - \underline{P}_0 \underline{b} r^{-1} \underline{b}^T \underline{P}_0 + \underline{Q} = \underline{0}$$

kann mit MATLAB numerisch für \underline{P}_0 gelöst werden (Befehl: *care*). Die Anwendung des Zusammenhangs $\underline{k}^T = r^{-1} \underline{b}^T \underline{P}_0$ liefert dann den Regler-Vektor

$$\underline{k}^T = [1000 \quad 1548 \quad 2960 \quad 7090].$$

Das zugehörige Vorfilter für stationäre Genauigkeit berechnet sich nach (s. z.B. Vorlesung „Regelung linearer Mehrgrößensysteme“, Kapitel 3.2) zu

$$\underline{M} = m = \left(\underline{c}^T (\underline{A} - \underline{b} \underline{k}^T)^{-1} \underline{b} \right)^{-1} = 1000.$$

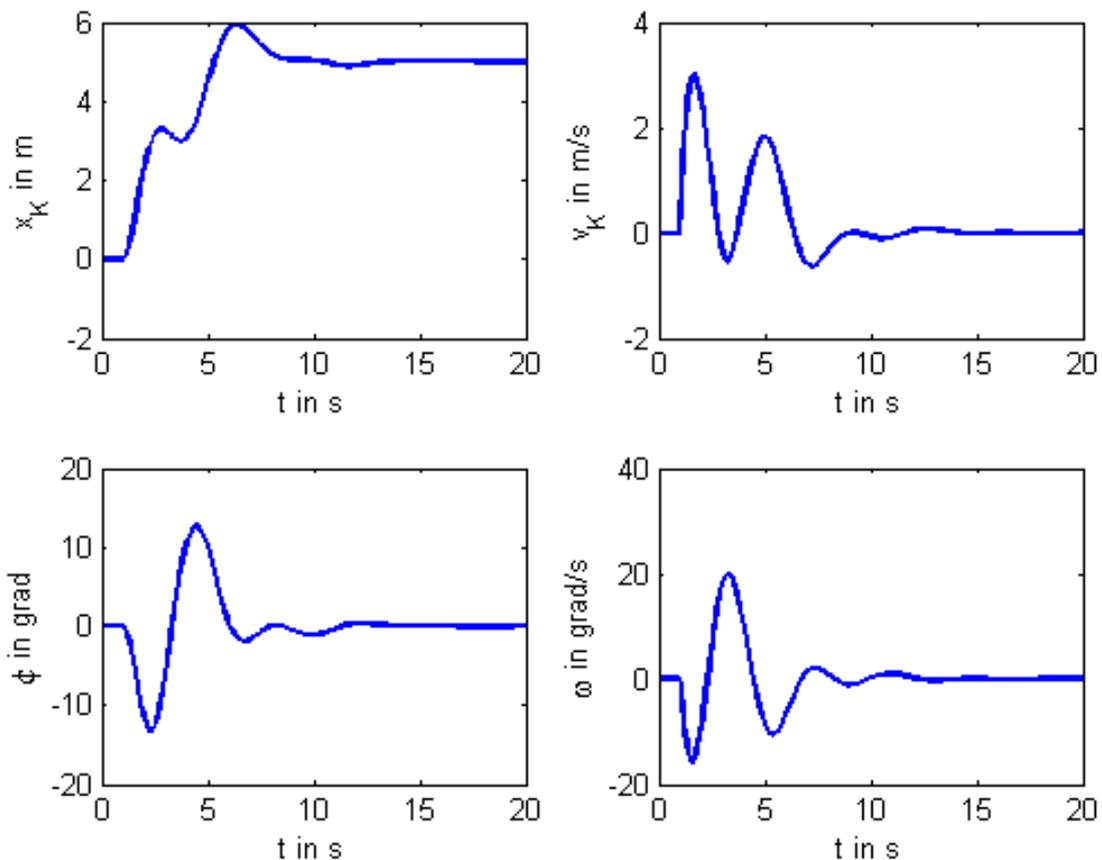
Die Eigenwerte des geschlossenen Kreises lassen sich durch die Lösung des charakteristischen Polynoms

$$\det(s\underline{I} - (\underline{A} - \underline{b} \underline{k}^T)) = 0$$

bestimmen und liegen bei $\lambda_{1,2} = -0.42 \pm 1.68i$ und $\lambda_{3,4} = -0.41 \pm 0.70i$. Der Riccati-Regler ist somit identisch zu einem Polvorgabe-Regler mit den genannten Polen, welcher z.B. mithilfe der Ackermann-Formel berechnet werden könnte.

Simulation

Wird der entworfene Regler mit dem **nichtlinearen Systemmodell** simuliert, ergeben sich für $w(t) = 5 \cdot \sigma(t - 1 \text{ s})$ folgende Verläufe der Zustandsvariablen:



Offenbar gelingt es dem Riccati-Regler binnen weniger Sekunden das Lastgewicht von $x_K = 0 \text{ m}$ nach $x_K = 5 \text{ m}$ zu transportieren. Die maximale Winkelauslenkung von ca. 13° zeigt, dass übermäßige Schwingungen des Lastgewichts vermieden werden können. Die Einbrüche im Beschleunigungsvorgang spiegeln das nichtlineare Systemverhalten wider.

Erkauft wird diese Performance durch einen hohen Spitzenwert der Stellgröße von ca. 5000 N. Dieser kann verringert werden, indem ein erneuter Reglerentwurf mit einer stärkeren Gewichtung der Stellgröße von z.B. $r = 50$ durchgeführt wird.

Systemdynamik

Gegeben sei ein zweidimensionales System mit folgender Dynamik:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - x_2 + u \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Das System besitzt Eigenwerte bei $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -2$ und ist somit aufgrund von λ_1 instabil. Die Zustände des Systems seien direkt messbar.

Ziele der Regelung sind die Stabilisierung des Systems sowie die Nachführung der Systemtrajektorien und der Stellgrößen für die Sollwertverläufe

$$\begin{aligned} x_{1,s} &= 0.2t, \\ x_{2,s} &= 0.2, \\ u_s &= -0.4t + 0.2. \end{aligned}$$

Entwurf der optimalen Folgeregelung

Zunächst ist zu prüfen, ob die Sollwertverläufe der Systemdynamik gehorchen. Für die Ableitung der Sollwertverläufe gilt $\dot{x}_{1,s} = 0.2$ und $\dot{x}_{2,s} = 0$. Einsetzen der Sollwerte in die Zustandsdifferentialgleichung liefert ebenfalls

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2t \\ 0.2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot (-0.4t + 0.2) = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

weshalb die Sollwertdynamik konform zur Systemdynamik ist. Damit ist in der Dynamikgleichung für die Abweichungen $\Delta \underline{x}$ kein Störterm mehr zu berücksichtigen und $\underline{p}(t) = \underline{0}$ ist die Lösung der Differentialgleichung (7) in Abschnitt 1.2.3.

Das Regelgesetz lautet dann nach Fall α) aus Abschnitt 1.2.4

$$u = -r^{-1} \underline{b}^T \underline{P} (\underline{x} - \underline{x}_s) + \underline{u}_s.$$

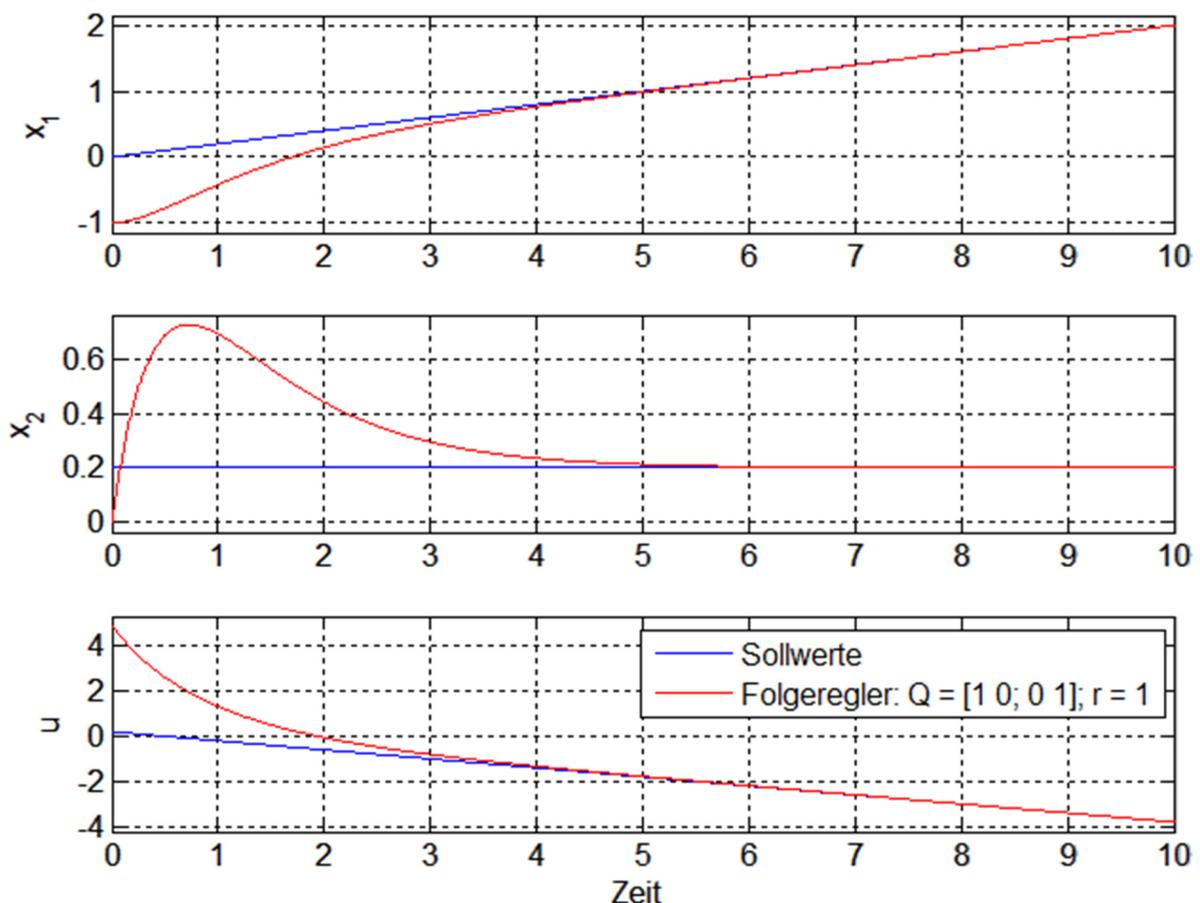
Weil \underline{A} und \underline{b}^T in diesem Beispiel zeitunabhängig sind und das System vollständig steuer- und beobachtbar ist, lässt sich die Matrix $\underline{P} = \underline{P}_0$ bei Betrachtung eines unendlichen Zeitintervalls als Lösung der *algebraischen Matrix-Riccati-Gleichung*

$$\underline{P}_0 \underline{A} + \underline{A}^T \underline{P}_0 - \underline{P}_0 \underline{b} r^{-1} \underline{b}^T \underline{P}_0 + \underline{Q} = \underline{0}$$

berechnen. Mit den Gewichtungsmatrizen $\underline{Q} = \underline{I}$ und $\underline{R} = r = 1$ erhält man so die Lösung der Riccati-Gleichung als

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} 9.2 & 4.2 \\ 4.2 & 2.2 \end{pmatrix}.$$

Wird der Regelkreis mit dem Startzustand $\underline{x}_0 = [0 \ 0]^T$ simuliert, ergeben sich folgende Verläufe der Eingangs- und Zustandsgrößen:



Wie zu erkennen ist, gelingt es dem Regler, den Regelkreis zu stabilisieren und die Größen binnen weniger Sekunden den gewünschten Verläufen nachzuführen.

Gesucht sei das Minimum des Gütemaßes

$$J = h(\underline{x}(t_e), t_e) + \int_{t_0}^{t_e} f_0(\underline{x}, \underline{u}, t) dt$$

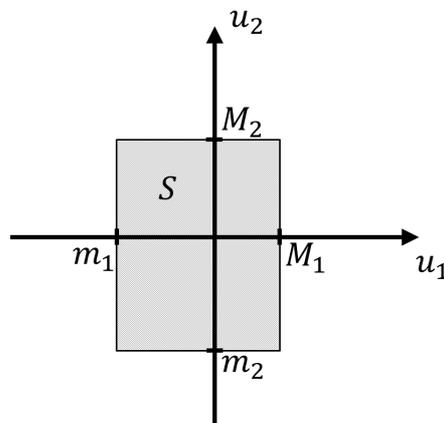
unter den Randbedingungen

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t), \quad \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0.$$

Die enthaltenen Funktionen h , f_0 und \underline{f} seien stetig differenzierbar nach \underline{x} und t und somit auch selbst stetig. Die Stellgröße $\underline{u}(t)$ sei jetzt beschränkt und liege in einem Unterraum S des p -dimensionalen Stellerraums. Ein Beispiel hierfür sind entsprechende Unter- und Obergrenzen für die Komponenten, etwa

$$m_v \leq u_v \leq M_v, \quad v = 1, \dots, p.$$

Beispiel: $p = 2$



Durch einfache Koordinatentransformation lassen sich diese Forderungen in

$$|u_v(t)| \leq 1, \quad v = 1, \dots, p$$

überführen.

Unter der zusätzlichen Annahme, dass die Stellgrößen $u_v(t)$ stückweise stetig sind, gilt dann das sogenannte

Maximumprinzip von Pontrjagin

Bilden $\underline{u}^*(t)$ und $\underline{x}^*(t)$ eine Lösung des Optimierungsproblems, so gibt es eine stetige Lösung $\underline{\psi}^*(t)$ der adjungierten Differentialgleichung

$$\underline{\dot{\psi}} = - \left. \frac{\partial H}{\partial \underline{x}} \right|_*$$

derart, dass für jedes $t \in [t_0, t_e]$ gilt:

$$H(\underline{x}^*, \underline{\psi}^*, \underline{u}^*, t) \geq H(\underline{x}^*, \underline{\psi}^*, \underline{u}, t)$$

mit $\underline{u} \in S$ beliebig.

Zusatz:

- Für zeitoptimale Regelungen gilt die Forderung

$$\underline{\psi}^*(t) \neq \underline{0}.$$

- Hängen f_0 und \underline{f} nicht explizit von t ab und ist t_e frei, so gilt

$$H(\underline{x}^*, \underline{\psi}^*, \underline{u}^*) = 0$$

für jedes $t \in [t_0, t_e]$.

Das Maximumprinzip stellt i.A. nur eine *notwendige Bedingung* für die optimale Lösung dar, im Falle der *zeitoptimalen Regelung* linearer und zeitinvarianter Strecken ist es jedoch auch *hinreichend*.

Satz von Feldbaum

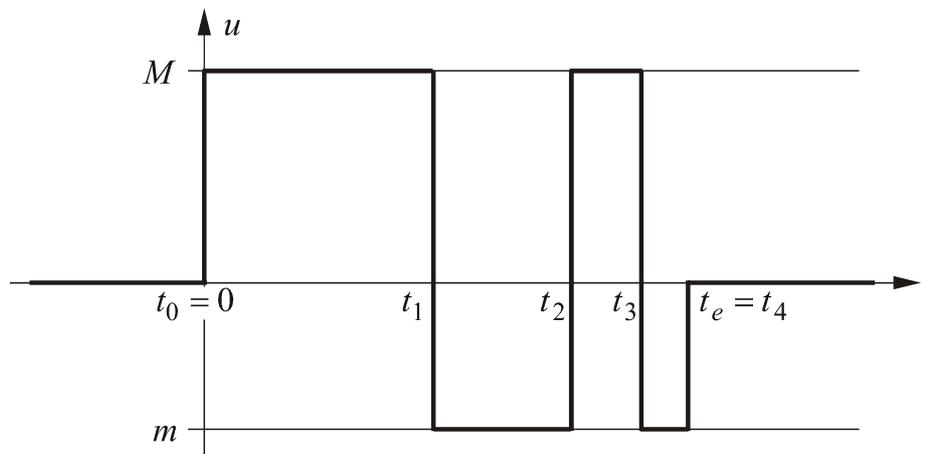
Ist das System

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{A} \underline{x} + \underline{B} \underline{u} \\ &= \underline{A} \underline{x} + \underline{b}_1 u_1 + \dots + \underline{b}_p u_p\end{aligned}$$

von jedem Eingang u_i aus steuerbar ($i = 1, \dots, p$) und hat \underline{A} nur reelle Eigenwerte, so hat jede Komponente des zeitoptimalen Steuervektors $\underline{u}(t)$ höchstens $(n - 1)$ Umschaltungen, d.h. es liegen maximal n Schaltintervalle zwischen t_0 und t_e .

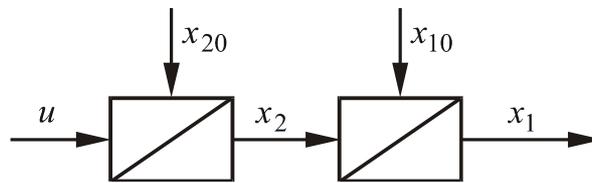
Beispiel:

Optimaler Steuervektor für ein System vierter Ordnung ($n = 4$) mit einer Steuergröße ($p = 1$):



Anmerkung: Der Satz von Feldbaum ist aus dem Maximumprinzip von Pontrjagin ableitbar.

Prozessmodell



Zustandsraumdarstellung

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u \quad \Rightarrow \quad \dot{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \underline{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{b}} u \quad (1)$$

Zeitoptimale Regelung

Gesucht: Zeitoptimale Überführung des Anfangszustands \underline{x}_0 in die Ruhelage $\underline{x}_e = \underline{0}$ bei beschränkter Stellgröße $|u| \leq M$

$$\Rightarrow \text{Gütemaß: } J = \int_0^{t_e} 1 \, dt = t_e \rightarrow \text{Minimum}$$

Lösung mittels des Hamilton-Verfahrens:

1. *Hamilton-Funktion:*

$$H = -1 + \psi_1^* \cdot x_2^* + \psi_2^* \cdot u$$

2. *Optimale Steuerung:*

Wegen $\underline{b}^T \cdot \underline{\psi}^* = \psi_2^*$ ergibt sich das optimale Steuergesetz nach dem Maximumprinzip zu

$$u^* = M \cdot \text{sign}(\psi_2^*(t)).$$

Zur Bestimmung von ψ_2^* benutzt man die zweite kanonische Differentialgleichung

$$\dot{\underline{\psi}}^* = - \left. \frac{\partial H}{\partial \underline{x}} \right|_* = - \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_1^* \end{bmatrix}$$

und erhält damit

$$\dot{\psi}_1^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_1^* = c_1 = \text{konst.},$$

$$\dot{\psi}_2^* = -\psi_1^* = -c_1 \quad \Rightarrow \quad \psi_2^* = -c_1 t + c_2.$$

Somit lautet die zeitoptimale Steuerfunktion

$$u^* = M \cdot \text{sign}(c_2 - c_1 t).$$

3. Optimale Regelung

Zunächst werden die optimalen Zustandstrajektorien berechnet. Dabei gelte die Beziehung $|u| \leq M = 1$.

$$\alpha) \quad u^* = +1$$

Mit (1) ergibt sich:

$$\dot{x}_2 = 1 \Rightarrow x_2 = t + d_2,$$

$$\dot{x}_1 = x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}t^2 + d_2 t + d_1 = \frac{1}{2} \underbrace{(t + d_2)^2}_{x_2} + d_1 - \frac{d_2^2}{2}.$$

Man erhält also Parabeln

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}x_2^2 + \underbrace{d_1 - \frac{d_2^2}{2}}_{=: d_{1+}} \\ &= \frac{1}{2}x_2^2 + d_{1+} \quad (\text{in Bild 1 gepunktet dargestellt (...)}). \end{aligned}$$

$$\beta) \quad u^* = -1$$

Analog zu $\alpha)$ ergeben sich ebenfalls Parabeln

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2}x_2^2 + \underbrace{d_1 + \frac{d_2^2}{2}}_{=:d_{1-}} \\ &= -\frac{1}{2}x_2^2 + d_{1-} \quad (\text{in Bild 1 gestrichelt dargestellt (---)}). \end{aligned}$$

Man erhält damit folgende Verläufe in der Zustandsebene:

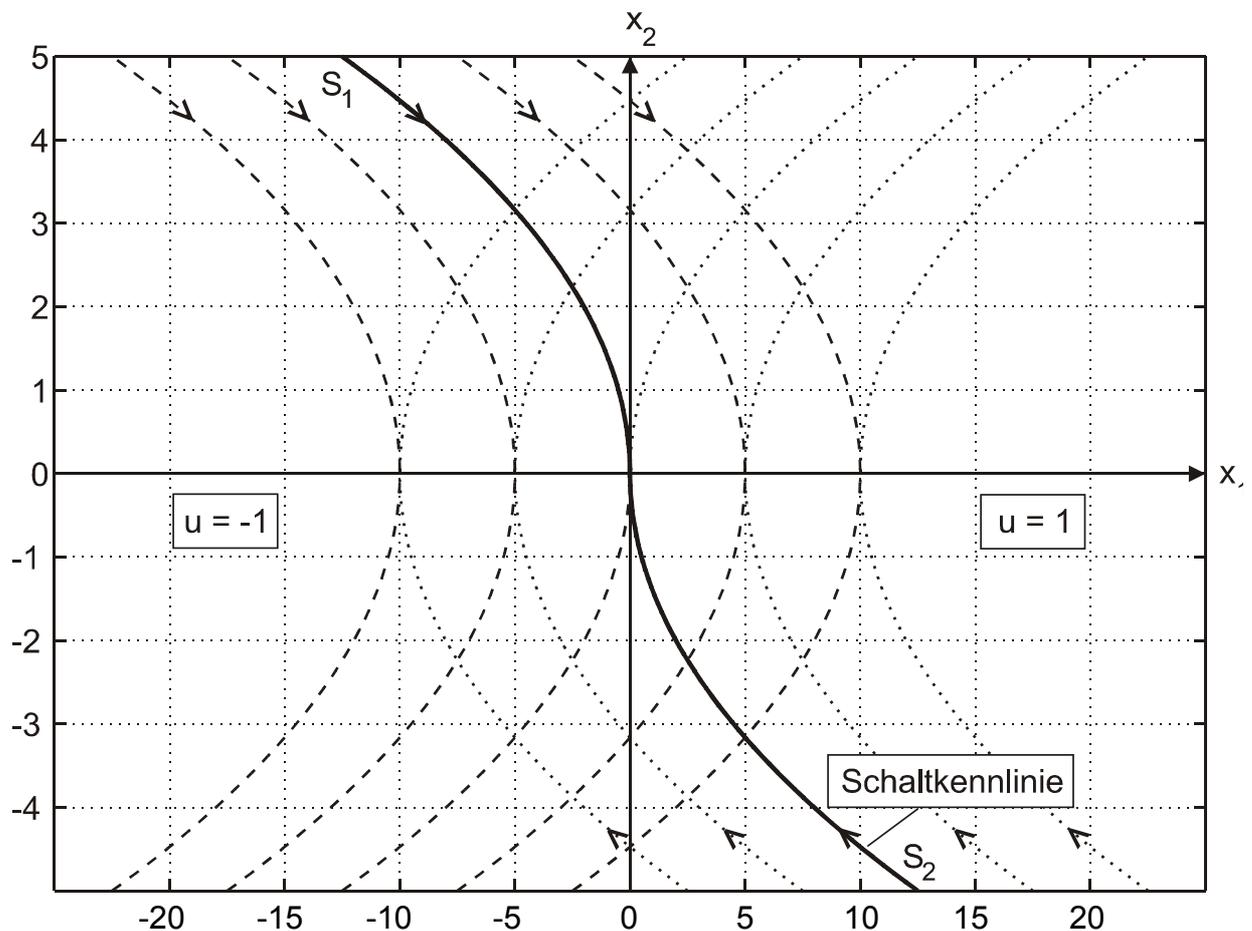


Bild 1: Zustandstrajektorien der zeitoptimalen Regelung

Zur Ermittlung der Schaltkennlinie ist zu beachten, dass der Zustandspunkt nach $\underline{x}(t_e) = \underline{0}$ streben soll. Daher muss er sich zuletzt auf den im Bild skizzierten Trajektorien S_1 bzw. S_2 bewegen, für die gilt: $d_{1+} = d_{1-} = 0$.

Für den allgemeinen Fall ($M \neq 1$) ergibt sich damit für die aus S_1 und S_2 zusammengesetzte *Schaltkennlinie* S :

$$\left. \begin{array}{l} S_1: x_1 = -\frac{x_2^2}{2M}, x_2 > 0 \\ S_2: x_1 = \frac{x_2^2}{2M}, x_2 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = -\frac{x_2|x_2|}{2M} = S(x_2).$$

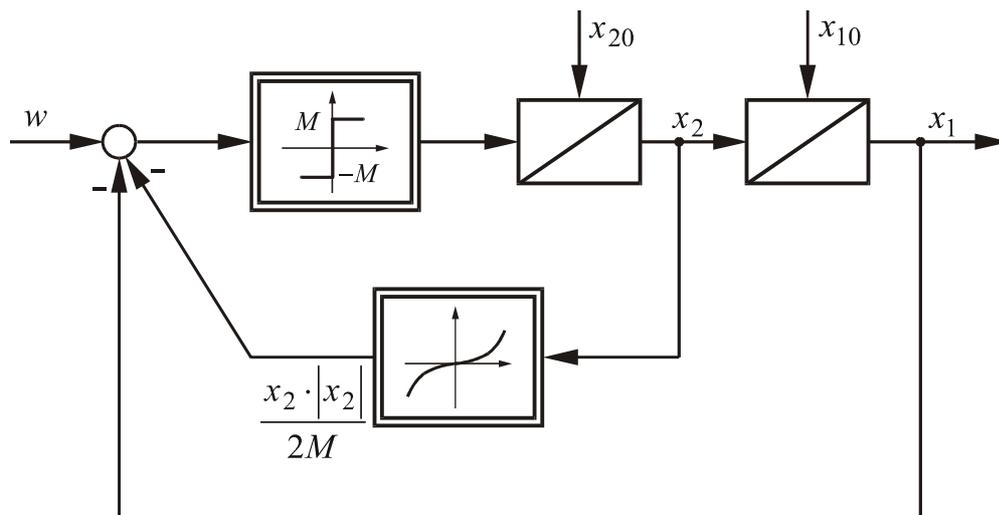
Also lautet die zeitoptimale Regelung:

$$u^* = \begin{cases} -M, & x_1 > S(x_2) \\ +M, & x_1 < S(x_2) \end{cases}$$

bzw.

$$u^*(\underline{x}) = -M \cdot \text{sign} \left(x_1 + \frac{x_2|x_2|}{2M} \right).$$

Struktur der zeitoptimalen Regelung:



1.2.7 Regeldifferenzgleichung des Riccati-Reglers ORS 1-18

Betrachtet wird der zeitinvariante Riccati-Regler, dessen in Abschnitt 1.2.2 der Vorlesung hergeleitetes Regelgesetz

$$\underline{u} = -\underline{K} \underline{x} \quad (1)$$

lautet. Die zugehörige stationäre Riccati-Gleichung ergibt sich zu

$$\underline{P}_0 \underline{A} + \underline{A}^T \underline{P}_0 - \underline{P}_0 \underline{B} \underline{R}^{-1} \underline{B}^T \underline{P}_0 + \underline{Q} = \underline{0}. \quad (2)$$

Mit \underline{K} aus (1) folgt mit der Symmetrie von \underline{P}_0 (vergleiche Vorlesung)

$$\underline{R} \underline{K} = \underline{B}^T \underline{P}_0 \quad \text{bzw.} \quad \underline{P}_0 \underline{B} = \underline{K}^T \underline{R},$$

so dass sich (2) auch umformen lässt zu

$$\underline{P}_0 (j\omega \underline{I} - \underline{A}) + (-j\omega \underline{I} - \underline{A}^T) \underline{P}_0 - \underline{K}^T \underline{R} \underline{K} = \underline{Q}. \quad (3)$$

Multipliziert man (3) von links mit $\underline{B}^T (-j\omega \underline{I} - \underline{A}^T)^{-1}$ sowie von rechts mit dem Term $(j\omega \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B}$, so erhält man

$$\begin{aligned} & \underline{B}^T (-j\omega \underline{I} - \underline{A}^T)^{-1} \underline{K}^T \underline{R} + \underline{R} \underline{K} (j\omega \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} \\ & + \underline{B}^T (-j\omega \underline{I} - \underline{A}^T)^{-1} \underline{K}^T \underline{R} \underline{K} (j\omega \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} \\ & = \underline{B}^T (-j\omega \underline{I} - \underline{A}^T)^{-1} \underline{Q} (j\omega \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B}. \end{aligned} \quad (4)$$

Die „linke Seite“ von (4) lässt sich auch als

$$\left[\underline{I} + \underline{B}^T (-j\omega \underline{I} - \underline{A}^T)^{-1} \underline{K}^T \right] \underline{R} \left[\underline{I} + \underline{K} (j\omega \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} \right] - \underline{R}$$

schreiben, sodass letztlich folgende **Regeldifferenzgleichung** gilt:

$$\begin{aligned} & \left[\underline{I} + \underline{B}^T (-j\omega \underline{I} - \underline{A}^T)^{-1} \underline{K}^T \right] \underline{R} \left[\underline{I} + \underline{K} (j\omega \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} \right] \\ & = \underline{B}^T (-j\omega \underline{I} - \underline{A}^T)^{-1} \underline{Q} (j\omega \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{B} + \underline{R}. \end{aligned} \quad (5)$$

Im SISO-Fall gilt für den Riccati-Regler (siehe Vorlesung)

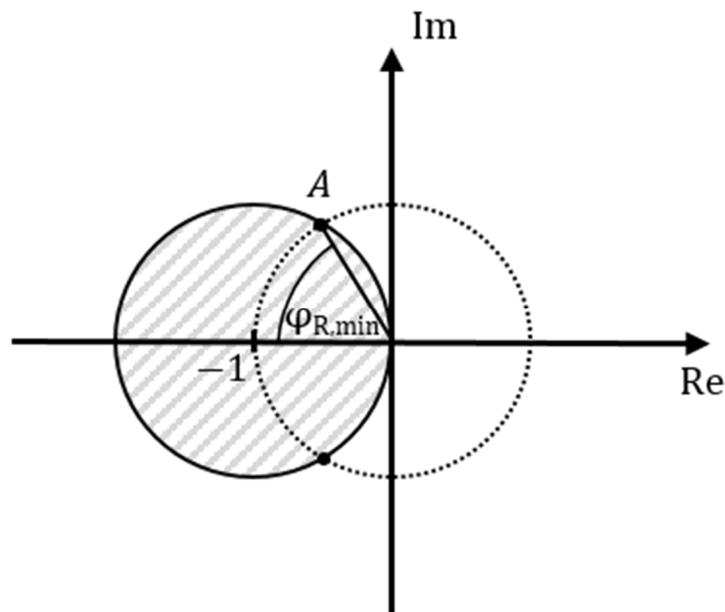
$$|1 + F_o(j\omega)|^2 \geq 1.$$

Offenbar gilt dann auch

$$|1 + F_o(j\omega)| \geq 1, \tag{1}$$

was sich sehr anschaulich interpretieren lässt:

Der Abstand der linearen Ortskurve $F_o(j\omega)$ vom kritischen Punkt $-1 + j0$ der komplexen Ebene ist gemäß (1) stets ≥ 1 , d.h. die Ortskurve tritt nie in einen Einheitskreis um $-1 + j0$ ein. In der folgenden Abbildung ist dieser Bereich schraffiert dargestellt. Zur Abschätzung der Phasenreserve ist der Einheitskreis um 0 mit gepunkteter Umrandung abgebildet.



Es lässt sich leicht berechnen, dass der Schnittpunkt A bei $(-1/2, \sqrt{3}/2)$ liegt. Somit folgt für die minimale Phasenreserve $\varphi_{R,\min}$ die Beziehung $\tan \varphi_{R,\min} = \sqrt{3}$, weshalb die Phasenreserve φ_R eines zeitinvarianten Riccati-Reglers offenbar stets größer als 60° sein muss.

1.2.7 Phasenreserve Riccati-Regler (SISO-Fall) (2) ORS 1-20

Beispiel: Lineare Ortskurve des offenen Kreises $F_o(j\omega)$ der mit einem Riccati-Regler geregelten Verladebrücke von den Beiblättern ORS 1-5 bis 1-8

Unter Verwendung der linearen Systembeschreibung und der spezifizierten Gewichtungsmatrizen ergibt sich für den offenen Kreis folgende Übertragungsfunktion:

$$F_o(j\omega) = \underline{k}^T (j\omega \underline{I} - \underline{A})^{-1} \underline{b} = \frac{1.678 (j\omega)^3 + 1.408 (j\omega)^2 + 3.037 j\omega + 1.962}{(j\omega)^4 + 2.943 (j\omega)^2}$$

Eine Detailansicht der Ortskurve dieser Übertragungsfunktion zeigt deutlich, dass die lineare Ortskurve nie in den Einheitskreis um -1 eintritt, womit eine hinreichende Phasenreserve sichergestellt ist.

